

Варіант №1

1. Поясніть, який фізичний зміст має хвильова функція $\psi(x)$ і чому величина $|\psi(x)|^2$ інтерпретується як густина ймовірності. Які умови нормування накладаються на хвильову функцію зв'язаного стану?
2. Поясніть, що таке коефіцієнт відбиття R і коефіцієнт проходження T . Чому для одновимірного розсіювання без втрат виконується $R + T = 1$?
3. Нормуйте хвильову функцію $\psi(x) = Ae^{-|x|/a}$ і знайдіть імовірність виявити частинку в області $|x| < a$.
4. Для стану з $l = 1$ перелічіть можливі значення L_z , знайдіть L^2 та довжину вектора моменту і порівняйте її з максимальним значенням L_z .
5. Порівняйте гармонічний осцилятор і нескінченну яму: як відрізняються потенціали, граничні умови, спектри та якісний вигляд нижчих хвильових функцій?
6. Для дворівневої системи з гамільтоніаном $\hat{H} = \frac{\hbar}{2}(\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)$ знайдіть рівні енергії, власні стани та максимальну імовірність переходу зі стану $|0\rangle$ у стан $|1\rangle$.

Варіант №2

1. Поясніть, які експериментальні факти (фотоефект, інтерференція окремих фотонів або електронів) свідчать про корпускулярно-хвильовий дуалізм і чому їх не можна пояснити в межах класичної фізики.
2. Поясніть, що таке резонансне проходження над бар'єром і чому воно пов'язане з інтерференцією хвиль усередині бар'єра.
3. Для плоскої хвилі $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ обчисліть густину потоку ймовірності j і поясніть її зв'язок зі швидкістю частинки.
4. Знайдіть енергію і довжину хвилі фотона, що випромінюється при переході атома водню з рівня $n = 3$ на рівень $n = 2$ (використайте $E_n = -13,6 \text{ eV}/n^2$).
5. Порівняйте відбиття від потенціальної сходишки при $E > V_0$ з тунелюванням через бар'єр при $E < V_0$: у чому принципова різниця фізичних механізмів?
6. Кубіт перебуває в стані, якому на сфері Блоха відповідають кути θ і φ . Знайдіть імовірності результатів вимірювання σ_x , σ_y і σ_z та перевірте, що вектор середніх значень має одиничну довжину.

Варіант №3

1. Поясніть, що таке стаціонарний стан. Чому в такому стані густина ймовірності не залежить від часу, хоча повна хвильова функція містить фазовий множник $e^{-iEt/\hbar}$?
2. Поясніть фізичний зміст орбітального моменту імпульсу в квантовій механіці. Чим квантовий опис відрізняється від класичної картини обертання?
3. Оцініть довжину хвилі де Бройля електрона з кінетичною енергією 100 еВ і порівняйте її з характерною міжатомною відстанню в кристалі.
4. Визначте кратність виродження рівня $n = 3$ нерелятивістського атома водню (без урахування спіну) і перелічіть відповідні пари (l, m) .
5. Порівняйте тунелювання через бар'єр і проникнення хвильової функції за межі скінченної ями: чому математично з'являються подібні експоненти?
6. Для двокубітного стану $a|00\rangle + b|11\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, знайдіть редуковану матрицю густини першого кубіта, її чистоту та ентропію фон Неймана. За яких a, b стан добутковий, а за яких максимально сплутаний?

Варіант №4

1. Поясніть фізичний зміст густини потоку ймовірності та рівняння неперервності. Що означає закон збереження ймовірності?
2. Поясніть, чому у сферично-симетричному потенціалі можна вибирати стани з визначеними значеннями L^2 та L_z .
3. Для гаусового пакета мінімальної невизначеності з шириною $\Delta x = \sigma$ знайдіть Δp і перевірте рівність $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.
4. Для радіальної функції основного стану $R_{10}(r) = 2a^{-3/2}e^{-r/a}$ знайдіть найбільш імовірну відстань електрона від ядра.
5. Порівняйте плоскі хвилі вільної частинки та стоячі хвилі в нескінченній ямі: як граничні умови змінюють спектр?
6. Використовуючи сходячкові оператори, знайдіть $L_+|l = 1, m = 0\rangle$ і $L_-|l = 1, m = 0\rangle$ та побудуйте матриці операторів L_x і L_y у базисі $l = 1$.

Варіант №5

1. Поясніть, чим відрізняються фазова й групова швидкості хвильового пакета і яка з них відповідає швидкості руху частинки.
2. Поясніть походження відцентрового доданка $\hbar^2 l(l+1)/(2mr^2)$ в ефективному потенціалі радіального рівняння та його якісну роль.
3. Для оператора проєкції $\hat{P} = |\phi\rangle\langle\phi|$ перевірте властивість $\hat{P}^2 = \hat{P}$ та поясніть її зміст у вимірюванні.
4. Застосуйте квазікласичне правило квантування $\oint p dx = 2\pi\hbar(n + 1/2)$ до гармонічного осцилятора й отримайте його спектр.
5. Порівняйте координатне та імпульсне представлення стану: як пов'язані хвильові функції і як виглядають оператори координати й імпульсу?
6. Для основного стану воднеподібного атома $\psi_{100} = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-r/a}$ обчисліть $\langle r \rangle$ і $\langle 1/r \rangle$ та перевірте віріальну теорему $\langle T \rangle = -E$.

Варіант №6

1. Сформулюйте теорему Еренфеста. За яких умов середні значення координати й імпульсу змінюються за законами класичної механіки?
2. Поясніть, чому енергетичні рівні воднеподібного атома в нерелятивістській моделі залежать лише від головного квантового числа n .
3. Для матриць Паулі обчисліть $[\sigma_x, \sigma_y]$ та $\{\sigma_x, \sigma_y\}$. У відповіді використайте σ_z та одиничну матрицю.
4. Запишіть квазікласичну оцінку коефіцієнта проходження через прямокутний бар'єр висоти V_0 і ширини a при $E < V_0$ та порівняйте її з $T \sim e^{-2\kappa a}$.
5. Порівняйте рух хвильового пакета вільної частинки і класичної частинки: що описує теорема Еренфеста, а яке явище (розпливання пакета) не має класичного аналога?
6. Знайдіть енергетичні рівні частинки в сферичній нескінченній ямі радіуса R для станів з $l = 0$, використавши заміну $u(r) = rR(r)$. Порівняйте з одновимірною нескінченною ямою.

Варіант №7

1. Дайте означення оператора спостережуваної величини. Чому власні значення ермітового оператора можна вважати можливими результатами вимірювання?
2. Поясніть фізичний зміст радіального розподілу ймовірності $r^2|R_{nl}(r)|^2$ для воднеподібного атома.
3. Знайдіть власні значення та нормовані власні вектори матриці Паулі σ_x .
4. Знайдіть поправку першого порядку до енергії основного стану нескінченної ями $0 < x < a$, спричинену збуренням $V'(x) = \lambda x$.
5. Порівняйте загальну дворівневу систему і спин $1/2$ як один з її прикладів: які математичні об'єкти спільні, а чим відрізняються фізичні реалізації?
6. Застосуйте квазікласичне правило квантування до потенціалу $V(x) = F|x|$ і знайдіть залежність рівнів енергії E_n від n .

Варіант №8

1. Поясніть, як імовірності результатів вимірювання знаходять із коефіцієнтів розкладу стану за власними функціями вимірюваної величини (правило Борна).
2. Сформулюйте умову застосовності квазікласичного наближення і поясніть, чому воно порушується поблизу точок повороту.
3. Для стану $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ обчисліть $\langle\sigma_z\rangle$ і $\langle\sigma_x\rangle$.
4. Для осцилятора зі збуренням $V' = \lambda x$ знайдіть поправки першого та другого порядку до енергії основного стану і порівняйте з точним результатом.
5. Порівняйте добуткові й сплутані стани двох кубітів: як різниця між ними проявляється в редукованих матрицях густини?
6. У квазікласичному наближенні оцініть імовірність тунелювання електрона з металу через трикутний бар'єр $V(x) = W - eFx$ (польова емісія). Поясніть залежність результату від напруженості поля.

Варіант №9

1. Поясніть, що означає сумісність спостережуваних і як вона пов'язана з комутатором відповідних операторів.
2. Поясніть зміст квазікласичного правила квантування та його зв'язок із класичною дією.
3. Для гамільтоніана $\hat{H} = (\hbar\Omega/2)\sigma_x$ і початкового стану $|0\rangle$ знайдіть імовірність виявити систему в стані $|1\rangle$ у момент t .
4. Для двократно виродженого рівня матриця збурення має вигляд $W = \begin{pmatrix} 0 & w \\ w^* & 0 \end{pmatrix}$. Знайдіть розщеплення рівня та правильні стани нульового наближення.
5. Порівняйте алгебраїчне розв'язання задачі про гармонічний осцилятор і результат квазікласичного правила квантування для нього.
6. Для ангармонічного осцилятора $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda x^4$ знайдіть поправку першого порядку до рівнів E_n , використовуючи $\langle n|x^4|n\rangle = \frac{3}{4}x_0^4(2n^2 + 2n + 1)$, $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Оцініть межу застосовності результату.

Варіант №10

1. Сформулюйте співвідношення невизначеностей Робертсона для двох спостережуваних. Який фізичний зміст має це співвідношення?
2. Поясніть, від яких величин залежить тунельна експонента в квазікласичному наближенні.
3. Для матриці густини $\rho = p_1|1\rangle\langle 1| + p_2|2\rangle\langle 2|$ знайдіть $\text{Tr } \rho$ і поясніть, які умови накладаються на p_1 і p_2 .
4. Частинка перебуває в нескінченній ямі $0 < x < a$. Запишіть граничні умови, знайдіть допустимі хвильові числа k_n та енергії E_n .
5. Порівняйте невироджену й вироджену стаціонарну теорію збурень: чому в одному випадку достатньо діагональних матричних елементів, а в іншому потрібна діагоналізація?
6. Заряджений осцилятор перебуває в однорідному електричному полі, $V' = -q\mathcal{E}x$. Знайдіть поправки першого та другого порядку до рівнів енергії і порівняйте з точним розв'язком.

Варіант №11

1. Поясніть, що таке дворівнева система. Наведіть кілька фізичних прикладів систем, які в певному наближенні можна вважати дворівневими.
2. Поясніть ідею стаціонарної теорії збурень і сформулюйте умову її застосовності.
3. Для $\rho = p|0\rangle\langle 0| + (1 - p)|1\rangle\langle 1|$ обчисліть чистоту $\text{Tr } \rho^2$. За якого значення p стан чистий, а за якого максимально змішаний?
4. Для притягального дельта-потенціалу $V(x) = -g \delta(x)$, $g > 0$, знайдіть енергію єдиного зв'язаного стану.
5. Порівняйте ефективні потенціали для $l = 0$ і $l \neq 0$ у кулонівському полі: як відцентровий доданок змінює поведінку радіальної функції поблизу нуля?
6. Частинка в двовимірній нескінченній квадратній ямі $0 < x, y < a$ перебуває на двократно виродженому рівні зі станами $(1, 2)$ і $(2, 1)$. Знайдіть розщеплення цього рівня під дією збурення $V' = \lambda xy$.

Варіант №12

1. Поясніть, як довільний чистий стан дворівневої системи зображується точкою на сфері Блоха. Що визначають кути θ і φ ?
2. Поясніть, чому у випадку виродженого рівня теорія збурень вимагає діагоналізації матриці збурення у виродженому підпросторі.
3. Для стану Белла $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$ знайдіть редуковану матрицю густини першого кубіта та її чистоту.
4. Скільки зв'язаних станів має симетрична прямокутна яма глибини V_0 і ширини a , якщо $a\sqrt{2mV_0}/\hbar = 7$? Обґрунтуйте відповідь.
5. Порівняйте співвідношення невизначеностей для координати й імпульсу та для компонент моменту імпульсу L_x і L_y : чим вони принципово відрізняються?
6. Частинка в нескінченній ямі $0 < x < a$ у момент $t = 0$ перебуває в стані $\psi(x, 0) = [\psi_1(x) + \psi_2(x)]/\sqrt{2}$. Знайдіть $\psi(x, t)$, густину ймовірності та частоту осциляцій $\langle x \rangle(t)$; поясніть фізичний зміст результату.

Варіант №13

1. Поясніть, чому в дворівневій системі з недіагональним у вибраному базисі гамільтоніаном імовірність знайти систему в базисному стані осцилює в часі.
2. Поясніть, як міркування симетрії (зокрема парності) дають змогу без обчислень встановити, що деякі матричні елементи збурення дорівнюють нулю.
3. Перевірте, чи є стан $(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)/2$ добутковим. Якщо так, запишіть стани окремих кубітів.
4. Використовуючи означення операторів знищення та народження осцилятора, перевірте співвідношення $[a, a^\dagger] = 1$.
5. Порівняйте квазікласичне наближення і стаціонарну теорію збурень: які малі параметри використовує кожен метод і для яких задач він ефективний?
6. Частинка падає на потенціальну сходинку $V(x) = 0$ при $x < 0$ і $V(x) = V_0$ при $x > 0$ з енергією $E > V_0$. Запишіть хвильові функції в обох областях, умови зшивання при $x = 0$ та знайдіть коефіцієнти відбиття і проходження.

Варіант №14

1. Поясніть, навіщо вводять матрицю густини ρ . У чому різниця між описом чистого стану $|\psi\rangle$ та змішаного ансамблю?
2. Поясніть, чому зв'язані стани одновимірного руху є невиродженими.
3. Знайдіть густину ймовірності для суперпозиції $\Psi(x, t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$ та вкажіть частоту її осциляцій.
4. Обчисліть $\langle 0|x^2|0\rangle$ для основного стану гармонічного осцилятора за допомогою операторів народження і знищення.
5. Порівняйте притягальну дельта-яму і скінченну прямокутну яму: кількість зв'язаних станів і поведінку хвильової функції.
6. Для скінченної симетричної ями $V(x) = -V_0$ при $|x| < a/2$ і $V(x) = 0$ при $|x| \geq a/2$ виведіть трансцендентне рівняння для енергій парних зв'язаних станів та розв'яжіть його графічно. Покажіть, що парний стан існує за будь-якої глибини ями.

Варіант №15

1. Поясніть, що таке сплутаний стан двох підсистем і чим він відрізняється від добуткового стану.
2. Сформулюйте осциляційну теорему: як кількість вузлів хвильової функції зв'язаного стану пов'язана з номером енергетичного рівня?
3. Стан $\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ розкладено за власними функціями оператора $\hat{A}$ з власними значеннями a_1, a_2 . Обчисліть $\langle A \rangle$ та дисперсію $(\Delta A)^2$.
4. Знайдіть ненульові матричні елементи $\langle m|x|n \rangle$ гармонічного осцилятора, виразивши x через a і $a^\dagger$.
5. Порівняйте квантове та класичне проходження над бар'єром при $E > V_0$: чому коефіцієнт відбиття в квантовому випадку відмінний від нуля?
6. Частинка з енергією $E < V_0$ падає на прямокутний бар'єр висоти V_0 і ширини a . Запишіть розв'язки в трьох областях, систему умов зшивання та знайдіть коефіцієнт проходження в границі $ka \gg 1$.

Варіант №16

1. Поясніть, навіщо вводять частковий слід і яку інформацію містить редукована матриця густини підсистеми.
2. Поясніть якісно, чому кількість зв'язаних станів у скінченній прямокутній ямі є скінченною.
3. Використовуючи співвідношення Робертсона $\Delta A \Delta B \geq |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|/2$, отримайте співвідношення невизначеностей для координати й імпульсу.
4. Для потенціалу $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ знайдіть класичні точки повороту для енергії $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.
5. Порівняйте зв'язаний стан у потенціальній ямі та стан розсіяння на бар'єрі: чим відрізняються граничні умови, нормування і фізичний зміст енергії?
6. Для притягального дельта-потенціалу $V(x) = -g\delta(x)$ знайдіть нормовану хвильову функцію зв'язаного стану, його енергію та імовірність виявити частинку в класично забороненій області.

Варіант №17

1. Поясніть, що означає принцип суперпозиції станів. Як він проявляється у задачі про частинку в ямі, де загальний стан можна розкласти за стаціонарними станами?
2. Поясніть, чому в симетричному потенціалі стаціонарні стани можна вибрати парними або непарними.
3. Для функції $\psi(x) = Ae^{ikx}$ знайдіть власне значення оператора p_x і енергію вільної частинки в цьому стані.
4. Для потенціальної сходишки висоти V_0 при $E > V_0$ запишіть коефіцієнт відбиття R через хвильові числа k_1 і k_2 та перевірте граничні випадки.
5. Порівняйте нескінченну та скінченну прямокутні ями: як змінюються граничні умови, поведінка хвильової функції поза ямою та енергетичний спектр?
6. Знайдіть коефіцієнт проходження $T(E)$ частинки через дельта-бар'єр $V(x) = \alpha \delta(x)$, $\alpha > 0$. Дослідіть границі малих і великих енергій.

Варіант №18

1. Поясніть, що таке спектральний розклад ермітового оператора і як через проектори описується вимірювання.
2. Поясніть, чому для дельта-потенціалу хвильова функція залишається неперервною, а її похідна має стрибок.
3. Для частинки з гамільтоніаном $\hat{H} = p_x^2/(2m) + V(x)$ обчисліть комутатор $[\hat{H}, x]$ і поясніть, як із нього отримують оператор швидкості.
4. Для хвилі в області з потенціалом $V = \text{const}$ запишіть стаціонарне рівняння Шредінгера та знайдіть зв'язок між хвильовим числом і величиною $E - V$.
5. Порівняйте класичне та квантове проходження через бар'єр при $E < V_0$. Чому в квантовому випадку можливе тунелювання?
6. Гармонічний осцилятор у момент $t = 0$ перебуває в стані $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Знайдіть стан у момент t , середні значення $\langle x(t) \rangle$ і $\langle p(t) \rangle$ та порівняйте їх із класичним рухом.

Варіант №19

1. Поясніть, що означає ортогональність власних функцій у квантовій механіці. Чому вона важлива для розкладу довільного стану?
2. Поясніть, чому навіть у найнижчому стані гармонічного осцилятора енергія не дорівнює нулю. Як це пов'язано зі співвідношенням невизначеностей?
3. Знайдіть комутатор $[x, p_x^2]$, використовуючи канонічне співвідношення $[x, p_x] = i\hbar$.
4. Обчисліть $[L_z, L_{\pm}]$, використовуючи $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$. Поясніть, як при цьому змінюється квантове число m .
5. Порівняйте суперпозицію двох станів і статистичну суміш тих самих станів: у чому різниця для інтерференційних членів і для матриці густини?
6. Для стану $|n\rangle$ гармонічного осцилятора обчисліть $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, Δx , Δp за допомогою операторів народження і знищення. Для якого n добуток $\Delta x \Delta p$ мінімальний?

Варіант №20

1. Поясніть, чим кореляції результатів вимірювань у стані Белла відрізняються від класичних статистичних кореляцій.
2. Поясніть, чому гармонічний осцилятор є універсальним наближенням для руху поблизу стійкої рівноваги.
3. Для гладкої функції $f(x)$ обчисліть $[p_x, f(x)]$ у координатному представленні, якщо $p_x = -i\hbar d/dx$.
4. Для азимутальної частини хвильової функції $e^{im\varphi}$ знайдіть дію оператора $L_z = -i\hbar \partial/\partial\varphi$ і поясніть, чому m має бути цілим.
5. Порівняйте одновимірну потенціальну яму та рух у центральному полі: де роль граничних умов відіграють умови на кінцях інтервалу, а де регулярність при $r = 0$ та поведінка при $r \rightarrow \infty$?
6. Гаусів пакет вільної частинки в момент $t = 0$ має ширину σ_0 . Знайдіть залежність ширини від часу та оцініть час, за який ширина пакета електрона з $\sigma_0 = 1 \text{ \AA}$ подвоїться.